

THÉORIE DES VIBRATIONS DES SYSTÈMES CONTINUS

Par Annie Ross  
Janvier 2004

**1. Objectifs**

Ce document est destiné aux étudiants qui comptent effectuer le laboratoire intitulé « Vibrations latérales de poutres », dans le cadre des cours MEC4100 ou MEC4110. Il compte 3 objectifs :

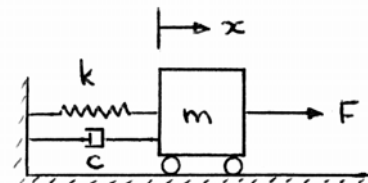
- Présenter un rappel concis de la théorie des vibrations des systèmes discrets. Ces connaissances, acquises dans le cadre du cours MEC2410, forment la base qui permet de comprendre la théorie des vibrations des systèmes continus.
- Exposer sommairement la théorie des vibrations des systèmes continus. Pour ce faire, on se basera en particulier sur le cas des vibrations transversales des poutres.
- Formuler la méthode de Rayleigh menant aux fréquences naturelles d'un système continu.

**2. Vibration libre d'un système masse-ressort-amortisseur à 1 d.d.l.**

Le schéma ci-dessous représente un système mécanique à paramètres groupés et à 1 degré de liberté (d.d.l.). L'équation différentielle du mouvement (EDM) de ce système s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

- où  $x = x(t)$  est le déplacement de la masse ( $m$ ) à partir de sa position d'équilibre statique  
 $k$  est la constante de rigidité du ressort (N/m)  
 $c$  est le coefficient d'amortissement (N·s/m)  
 $m$  est la masse retenue par le ressort (kg)  
 $F = F(t)$  est une force extérieure qui sert à exciter le système (N)



**Réponse libre non amortie :**

Ici,  $F(t) = 0$  et  $c = 0$ . Le système masse-ressort peut osciller librement. En appliquant la méthode des transformées de Laplace, on détermine facilement la réponse libre du système suite à l'application de conditions initiales arbitraires  $x(0) = x_o$ ,  $\dot{x}(0) = v_o$  :

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_o \cos(\omega_n t)$$

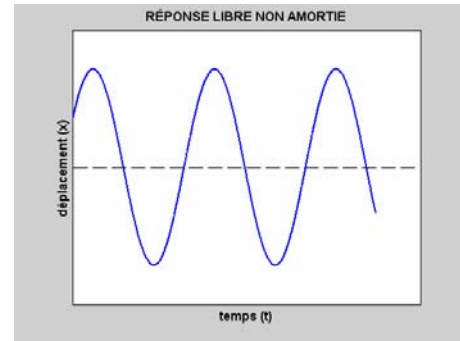
- où  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la fréquence naturelle du système (rad/s)

On peut aussi écrire cette réponse sous la forme suivante :

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi)$$

où  $X = \sqrt{x_o^2 + v_o^2}$  est son amplitude

$$\phi = \arctg\left(\frac{x_o \omega_n}{v_o}\right) \text{ est un déphasage}$$



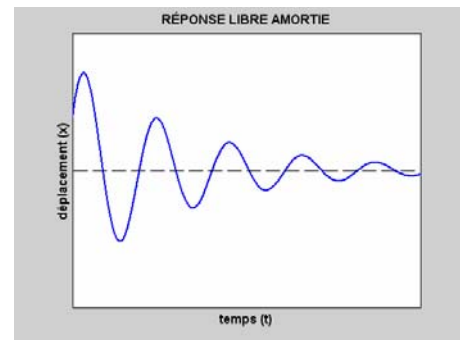
### Réponse libre faiblement amortie :

Ici, on a toujours  $F(t) = 0$ . Par contre, on considère un coefficient d'amortissement  $c > 0$ . La méthode de Laplace nous permet d'obtenir la réponse suivante :

$$x(t) = X \exp(-\zeta \omega_n t) \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

où  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  est le taux d'amortissement (sans unités)

$$\phi = \arctg\left(\frac{x_o \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{v_o + x_o \zeta \omega_n}\right)$$



La réponse ci-dessus n'est valable que dans les cas sous amortis, c'est-à-dire lorsque  $\zeta < 1$ . On constate que l'amortissement tend à ramener le système vers sa position d'équilibre initiale en réduisant l'amplitude de la vibration. De plus, la fréquence des oscillations est plus faible que dans le cas non amorti ( $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n$ ).

### 3. Vibration forcée d'un système masse-ressort-amortisseur à 1 d.d.l.

La réponse forcée du système s'obtient en appliquant une force dynamique  $F(t)$  au système. Si cette force est *harmonique*,  $F(t) = F_o \sin(\omega t)$ , le système masse-ressort-amortisseur est contraint à osciller à la fréquence d'excitation  $\omega$ , plutôt qu'à sa fréquence naturelle  $\omega_n$ .

Dans ce type d'analyse, on représente la *réponse stationnaire* du système par son *spectre*, c'est-à-dire son amplitude et son déphasage en fonction de la fréquence d'excitation. (Le régime stationnaire fait suite au régime transitoire et correspond à la stabilisation du système autour de sa nouvelle position d'équilibre statique.)

En l'absence de conditions initiales (i.e.  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ), la transformation de l'EDM dans le domaine de Laplace produit la réponse :

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}$$

Pour connaître la réponse en fréquence du système, on remplace la variable de Laplace ( $s$ ) par son équivalent fréquentiel  $s = j\omega$ , pour obtenir :

$$X(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{(k - \omega^2 m) + j\omega c}$$

En multipliant le terme de droite par  $k/k$ , puis en appliquant  $\zeta$  et  $\omega_n$  tels que définis précédemment, on peut réécrire l'équation ci-dessus sous sa forme classique :

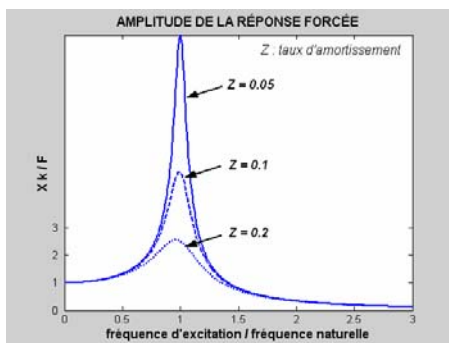
$$X(j\omega) = \frac{F(j\omega)/k}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

La réponse temporelle *stationnaire* du système peut donc s'écrire :

$$x(t) = X \sin(\omega t + \psi)$$

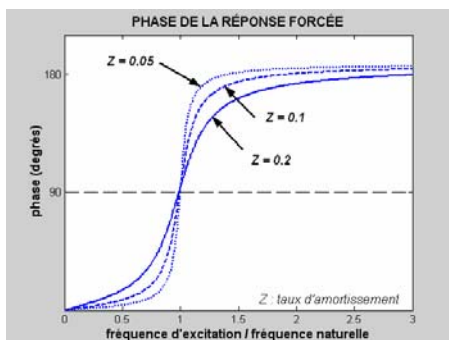
où  $X = \frac{F_o/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$  est l'amplitude du déplacement

$\psi = \arctg\left[\frac{0}{F_o/k}\right] - \arctg\left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$  est le déphasage entre la force et la réponse. Ce déphasage représente un retard temporel du déplacement par rapport à la force appliquée au le système.



On constate que plus la fréquence d'excitation  $\omega$  se rapproche de la fréquence naturelle  $\omega_n$ , plus le rapport d'amplitude  $kX/F_o$  est élevé. On remarque aussi que plus le taux d'amortissement  $\zeta$  est élevé, plus l'amplitude de la réponse est faible.

La *fréquence de résonance* ( $\omega_r$ ) est la fréquence d'excitation pour laquelle la réponse du système est la plus forte ( $\omega_r \neq \omega_n$ ).



La figure ci-contre montre l'évolution de la phase ( $-\psi$ ) en fonction de la fréquence d'excitation et du taux d'amortissement. On constate que peu importe le taux d'amortissement, le déphasage atteint la valeur  $-\psi = 90^\circ$  lorsque la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle du système ont la même valeur ( $\omega = \omega_n$ ).

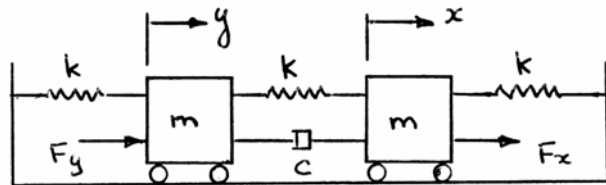
## Évaluation expérimentale de la fréquence naturelle

Il est donc possible d'évaluer la fréquence naturelle d'un système mécanique réel à partir de résultats expérimentaux. Il s'agit de lui imposer une force extérieure contrôlée et de mesurer le déplacement temporel du système. Les spectres d'amplitude et de phase sont obtenus en balayant les fréquences à l'intérieur d'une certaine plage. On évalue la fréquence naturelle du système par l'une et/ou l'autre des deux méthodes suivantes :

- À partir du spectre d'amplitude, on repère la fréquence de résonance et on estime  $\omega_n \approx \omega_r$ , ce qui est vrai dans le cas de systèmes très faiblement amortis ( $\zeta < 0.15$ ).
- À partir du spectre de phase, on repère la fréquence pour laquelle  $-\psi = \pi/2$ .

### 4. Vibrations d'un système à plusieurs d.d.l.

Le schéma ci-contre représente un système mécanique à paramètres groupés et à 2 degrés de liberté (2 d.d.l.).



L'EDM de ce système s'écrit sous la forme matricielle :

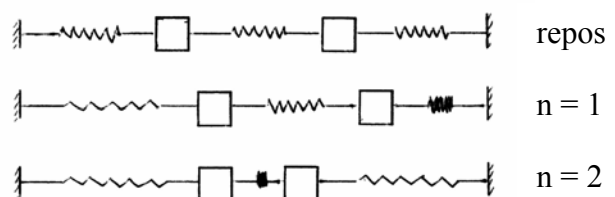
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

#### Réponse libre non amortie ( $c = 0$ et $F_x = F_y = 0$ ) :

En étudiant les *valeurs propres* de ce système, on découvre qu'il possède 2 fréquences naturelles, en l'occurrence :  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ . Le nombre de fréquences naturelles que possède un système est égal au nombre ( $n$ ) de ses degrés de liberté.

Chaque fréquence naturelle correspond à un *mode* de vibration (c'est la façon dont le système se déforme). On obtient chacun de ces modes, à l'aide des *vecteurs propres* de l'EDM. (Le mode est défini par le rapport d'amplitude  $X/Y$  qui existe entre chaque d.d.l. du système, à une fréquence naturelle donnée.) La *matrice modale* est une matrice  $n \times n$  dont chaque colonne représente l'un des modes du système. Dans le cas présent, la matrice modale s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_{n=1} & \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_{n=2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



On voit que le système ne se déforme pas de la même façon, selon le mode considéré. On obtient finalement la réponse modale du système (pour chacun des modes  $n = 1, 2$ ) suite à l'application de conditions initiales arbitraires  $x_o, v_o$  :

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_n \times [A_n \sin(\omega_n t + \phi_n)]$$

où  $A_n$  et  $\phi_n$  diffèrent pour chacun des modes et dépendent des conditions initiales imposées.

La réponse totale du système est donnée par la somme de ses réponses modales :

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_n x_n(t) \\ \sum_n y_n(t) \end{Bmatrix}$$

De la même façon, on peut trouver les  $n$  fréquences naturelles et les  $n$  déformations modales pour tout système à  $n$  d.d.l.

### Réponse forcée non amortie ( $c = 0$ et $F_y = 0$ , mais $F_x \neq 0$ ) :

L'EDM matricielle d'un système mécanique à 2 d.d.l. prend typiquement la forme :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

S'il n'y a pas d'amortissement, alors la matrice des coefficients d'amortissement est nulle. En appliquant une force harmonique  $F_x \sin(\omega_x t)$  au système, celui-ci oscillera selon la fréquence  $\omega_x$  de l'excitation. La réponse du système prendra la forme suivante :

$$x(t) = \frac{F_x (k_{22} - m_2 \omega_x^2)}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega_x^2)(\omega_2^2 - \omega_x^2)} \sin(\omega_x t)$$

$$y(t) = \frac{F_x k_{21}}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega_x^2)(\omega_2^2 - \omega_x^2)} \sin(\omega_x t)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont la première et la deuxième fréquence naturelle du système, respectivement.

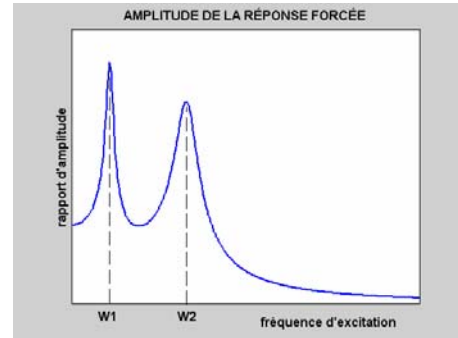
Il est clair que l'amplitude des oscillations du système atteindra un maximum lorsque la fréquence d'excitation  $\omega_x$  équivaudra à l'une ou l'autre de ses deux fréquences naturelles.

Aussi, le rapport d'amplitude ( $X/Y$ ) des oscillations varie selon la fréquence d'excitation. Lorsque la fréquence d'excitation s'approchera de l'une ou l'autre des fréquences naturelles du système, la déformation du système se conformera au mode correspondant.

## Réponse forcée faiblement amortie ( $c \neq 0$ et $F_x \neq 0$ , mais $F_y = 0$ ) :

Tout comme on le fait pour un système faiblement amorti à 1 d.d.l., on peut établir le spectre de la réponse en fréquence du système à  $n$  d.d.l. Les spectres d'amplitude et de phase prennent la forme suivante :

Le spectre d'amplitude fait voir un pic d'amplitude à chacune des fréquences de résonance. On peut ainsi estimer les  $n$  fréquences naturelles d'un système ( $\omega_n \approx \omega_r$ ) à  $n$  d.d.l.



## 5. Vibrations transversales des poutres

Dans les sections précédentes, nous avons considéré des systèmes à paramètres groupés (c'est-à-dire des systèmes dont les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont distincts). Dans le cas des systèmes continus, tels que les cordes, les poutres, les membranes et les plaques, ces trois propriétés sont confondues dans l'espace. Elles font partie du matériau et sont indissociables l'une de l'autre. Le système continu peut être considéré comme un système possédant une infinité de degrés de liberté. Il possède donc une multitude de fréquences naturelles.

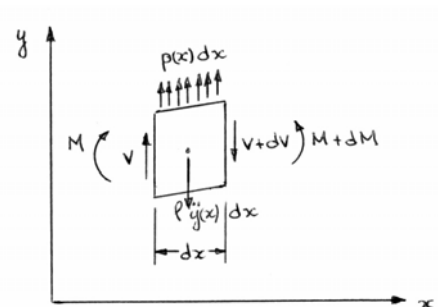
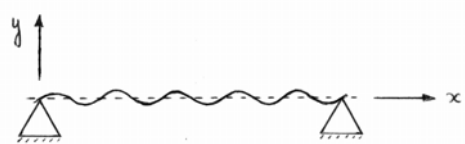
En appliquant les principes de la mécanique des corps déformables, nous pouvons écrire l'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement du système continu. L'application des conditions aux limites et des conditions initiales nous permet de résoudre l'équation aux dérivées partielles pour connaître le *comportement naturel* du système.

### Équation de la poutre en flexion

Considérons une poutre homogène de section  $A$  constante. La poutre est soutenue par un ou deux appuis et est soumise à un chargement distribué  $p(x)$ . La vibration transversale de la poutre est donnée par sa flèche  $y(x,t)$  par rapport à l'axe neutre longitudinal  $x$  et au temps  $t$ . L'équilibre dynamique est établi sur un élément de poutre de longueur  $dx$ .

Les propriétés de la poutre sont définies comme suit :

- $\rho$  : masse linéique (kg/m)
- $L$  : longueur (m) de la poutre
- $E$  : module d'élasticité (N/m<sup>2</sup>)
- $I$  : second moment de surface selon l'axe  $x$  (m<sup>4</sup>)
  
- $p(x)$  : chargement distribué (N/m)
- $y(x,t)$  : flèche de la poutre (m) à partir de sa position d'équilibre statique
- $V$  : effort tranchant (N)
- $M$  : moment fléchissant (Nm)
- $\rho \ddot{y}$  : inertie de l'élément de poutre (N/m)



Hypothèses appliquées :

- déplacements transversaux  $y(x,t)$  très faibles
- longueur ( $L$ ) de la poutre constante dans le temps
- inertie en rotation négligée
- déformation en cisaillement négligé
- section ( $A$ ) constante dans le temps et sur la longueur de la poutre
- rigidité  $EI$  constante dans le temps et sur la longueur de la poutre
- dissipation (amortissement) négligeable, tant à l'intérieur de la poutre qu'aux appuis

Résistance des matériaux :  $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$V = \frac{dM}{dx} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

Équilibre dynamique en  $y$  :  $p(x) - \frac{dV}{dx} = \rho \ddot{y}$

En vibrations libres, on a  $p(x) = 0 \rightarrow$   $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Comme dans le cas des systèmes à paramètres groupés, l'équation comprend un terme de rigidité ( $EI$ ) associé au déplacement et un terme de masse ( $\rho$ ) associé à l'accélération du corps continu.

### Équation d'amplitude

Appliquons la méthode de séparation des variables pour trouver la flèche  $Y(x)$ . Pour ce faire, on suppose que le mouvement est harmonique (sinusoïdal dans le temps).

$$y(x,t) = Y(x) \times G(t) \quad \text{où} \quad Y(x) = \text{amplitude des vibrations selon l'axe } x$$

$$G(t) = G_1 \sin(\omega t) + G_2 \cos(\omega t)$$

L'équation du mouvement de la poutre devient :  $EI G(t) \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho Y(x) \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0$

Et comme  $\ddot{G}(t) = -\omega^2 G(t)$ , on obtient :  $EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \rho \omega^2 Y = 0$

L'équation d'amplitude est donnée par la solution de cette équation différentielle d'ordre 4. Elle se lit comme suit :

$$Y_n(x) = A \cosh(\beta_n x) + B \sinh(\beta_n x) + C \cos(\beta_n x) + D \sin(\beta_n x)$$

où  $\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho \omega_n^2}{EI}}$  est le *nombre d'onde* (rad/m)

Bien sur, il existe une infinité de valeurs qui permettent à  $\beta_n$  de répondre à la solution du système. Chacune de ses valeurs ( $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ) correspond à un mode de vibration.

Enfin, 
$$y_n(x,t) = Y_n(x) \times [G_1 \sin(\omega_n t) + G_2 \cos(\omega_n t)]$$

### Conditions aux limites

Les fréquences naturelles sont obtenues à partir du nombre d'onde. Il s'agit d'imposer au modèle de la poutre (équation d'amplitude) les conditions qui correspondent à l'effet physique de ses appuis. Les conditions aux limites les plus courantes se situent aux extrémités de la poutre ( $x_o = 0$  ou  $x_o = L$ ). Ce sont les suivantes :

- encastrement :

$$\left. \begin{matrix} y = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} Y(x_o) = 0 \\ \left. \frac{dY}{dx} \right|_{x=x_o} = 0 \end{matrix}$$
- appui simple / charnière :

$$\left. \begin{matrix} y = 0 \\ M = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} Y(x_o) = 0 \\ \left. \frac{d^2Y}{dx^2} \right|_{x=x_o} = 0 \end{matrix}$$
- extrémité libre :

$$\left. \begin{matrix} M = 0 \\ V = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \left. \frac{d^2Y}{dx^2} \right|_{x=x_o} = 0 \\ \left. \frac{d^3Y}{dx^3} \right|_{x=x_o} = 0 \end{matrix}$$
- appui élastique (ressort) :

$$\left. \begin{matrix} M = 0 \\ V = ky \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \left. \frac{d^2Y}{dx^2} \right|_{x=x_o} = 0 \\ \left. \frac{d^3Y}{dx^3} \right|_{x=x_o} = \frac{\pm k}{EI} Y(x) \Big|_{x=x_o} \end{matrix}$$
- masse concentrée :

$$\left. \begin{matrix} M = 0 \\ V = m\ddot{y} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \left. \frac{d^2Y}{dx^2} \right|_{x=x_o} = 0 \\ \left. \frac{d^3Y}{dx^3} \right|_{x=x_o} = \frac{\pm M}{\rho L^4} (\beta L)^4 Y(x) \Big|_{x=x_o} \end{matrix}$$

Note : L'appui élastique est modélisé comme un ressort linéaire et sans masse, perpendiculaire à l'axe  $x$ . La masse concentrée est modélisée comme une particule, c'est-à-dire sans inertie en rotation. Des croquis explicatifs sont présentés à la section 6.

Pour tout autre type d'appuis ou pour tout appui localisé ailleurs qu'aux extrémités de la poutre, l'analyse doit être reprise.

## Fréquences naturelles et modes propres

Pour les conditions aux limites classiques présentées ci-dessous, les fréquences naturelles et l'équation d'amplitude sont bien connues. Pour chacun des cas, les constantes devant être appliquées à l'équation d'amplitude modale  $Y_n(x)$  sont résumées au tableau ci-dessous [Gorman, 1975]. À la colonne de droite,  $\beta_n$  représente le nombre d'onde pour chacun des 3 premiers modes de la poutre; il est multiplié par L (la longueur de la poutre) afin de fournir une valeur sans dimensions.

$$Y_n(x) = A \cosh\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + B \sinh\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + C \cos\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + D \sin\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right)$$

| Conditions aux limites | A        | B        | C         | D  | $\gamma$  | $\beta_1 L$<br>$\beta_2 L$<br>$\beta_3 L$ |
|------------------------|----------|----------|-----------|----|---|---|
| Libre-libre            | $\gamma$ | 1        | $\gamma$  | 1  | $\frac{\sin \beta L - \sinh \beta L}{\cosh \beta L - \cos \beta L}$ | 0.000<br>4.730<br>7.853                   |
| Encastrée-libre        | $\gamma$ | -1       | $-\gamma$ | 1  | $\frac{\sin \beta L + \sinh \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L}$ | 1.875<br>4.694<br>7.855                   |
| Encastrée-encastrée    | $\gamma$ | 1        | $-\gamma$ | -1 | $\frac{\sinh \beta L - \sin \beta L}{\cos \beta L - \cosh \beta L}$ | 4.730<br>7.853<br>10.996                  |
| appuis simple-simple   | 0        | 0        | 0         | 1  | ---   | 3.142<br>6.283<br>9.425                   |
| Encastré-simple        | $\gamma$ | 1        | $-\gamma$ | -1 | $\frac{\sinh \beta L - \sin \beta L}{\cos \beta L - \cosh \beta L}$ | 3.927<br>7.069<br>10.210                  |
| Simple-libre           | 0        | $\gamma$ | 0         | 1  | $\frac{\sin \beta L}{\sinh \beta L}$                                | 0.000<br>3.927<br>7.069                   |

Pour chaque mode, la fréquence naturelle est donnée par :  $\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$ .

### 6. Méthode de Rayleigh (systèmes à n d.d.l. et systèmes continus)

La méthode de Rayleigh sert à *estimer les fréquences naturelles* d'un système possédant plusieurs masses ou ressorts, ou d'un système continu (dont les propriétés sont distribuées). On peut l'appliquer aux systèmes à 1 ou plusieurs d.d.l., de même qu'aux systèmes continus.

Pour un système non dissipatif (sans amortissement), il y a conservation d'énergie dans le système. Au cours d'un cycle d'oscillation, cette énergie est échangée intégralement entre l'énergie cinétique  $T_{max}$  (lorsque la vitesse du système est maximum) et l'énergie potentielle  $U_{max}$  du système (lorsque la déformation du système est maximum). La méthode consiste à écrire l'équilibre énergétique du système :  $T_{max} = U_{max}$ .

Hypothèses :

- Mouvement harmonique simple
- Pas de dissipation ( $c = 0$ )
- Déformations modales supposées connues

### Système à 1 d.d.l.

À la fréquence naturelle du système, on peut écrire :

$$x = X \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad x_{\max} = X \quad \rightarrow \quad U_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k X^2$$

$$\dot{x} = \omega_n X \cos(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_{\max} = \omega_n X \quad \rightarrow \quad T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m (\omega_n X)^2$$

$$\text{d'où} \quad T_{\max} = U_{\max} \quad \rightarrow \quad \omega_n \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### Système à $n$ d.d.l.

On peut effectuer la même procédure pour estimer les diverses fréquences naturelles d'un système à plusieurs d.d.l. Il faut toutefois savoir prévoir adéquatement la déformation  $(Y/X)_n$  du système pour chacun des modes (voir section 4 ci-dessus). Voici un exemple à 2 d.d.l.

$$x = X \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad x_{\max} = X \quad \rightarrow \quad \dot{x}_{\max} = \omega_n X$$

$$y = Y \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad y_{\max} = Y = X \left( \frac{Y}{X} \right)_n \quad \rightarrow \quad \dot{y}_{\max} = \omega_n X \left( \frac{Y}{X} \right)_n$$

$$T_{\max}|_n = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m_1 (\omega_n X)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \omega_n X \left( \frac{Y}{X} \right)_n \right]^2$$

$$U_{\max}|_n = \sum \frac{1}{2} k \delta_{\max}^2 = \frac{1}{2} k_{11} X^2 + \frac{1}{2} k_{22} Y^2 + \frac{1}{2} k_{12} (X - Y)^2$$

$$U_{\max}|_n = \frac{1}{2} k_{11} X^2 + \frac{1}{2} k_{22} \left[ X \left( \frac{Y}{X} \right)_n \right]^2 + \frac{1}{2} k_{12} X^2 \left( 1 - \left[ \left( \frac{Y}{X} \right)_n \right] \right)^2$$

$$T_{\max} = U_{\max} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_{11} + k_{22} \left( \frac{Y}{X} \right)_n^2 + k_{12} \left( 1 - \left[ \left( \frac{Y}{X} \right)_n \right] \right)^2}{m_1 + m_2 \left( \frac{Y}{X} \right)_n^2}}$$

## Systèmes continus (poutre non uniforme en flexion)

Dans une poutre en flexion pure, la flèche est donnée par  $y(x,t)$  et l'énergie de déformation s'écrit comme suit [Bazergui et al.] :

$$\left. \begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI(x)} dx \\ M &= EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx$$

Remarque :  $y(x,t) = Y(x) \times G(t)$  est maximum lorsque  $G(t) = 1$ . Donc  $y(x,t)|_{\max} = Y(x)$ .

Dans le cas d'un mouvement harmonique, l'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{y}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^L (\omega_n y)^2 [\rho(x) dx] \rightarrow T_{\max} = \frac{\omega_n^2}{2} \int_0^L \rho(x) Y^2 dx$$

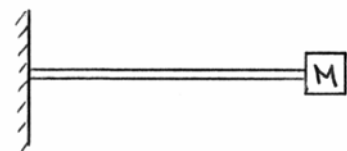
En égalisant l'énergie potentielle maximum  $U_{\max}$  et l'énergie cinétique maximum  $T_{\max}$  du système, on obtient :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho(x) Y(x)^2 dx}}, \quad \text{ce qui est analogue à } \omega_n \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Cette équation est applicable pour chacun des modes de la poutre, à condition d'exprimer correctement  $Y(x) = Y_n(x)$  dans chaque cas. Notons que la poutre peut avoir une section et une densité variables.

## Poutre en flexion avec masses ponctuelles (particules)

Si une poutre horizontale supporte une ou plusieurs masses ponctuelles  $M_i$ , il faudra tenir compte de leur énergie cinétique au dénominateur et de leur énergie potentielle au numérateur de l'équation de la fréquence naturelle.



$Y(x) = 0$  est défini comme étant la position d'équilibre statique de la poutre seule. Lorsque les masses ponctuelles sont montées sur la poutre, celle-ci subit une déformation initiale, jusqu'à atteindre une nouvelle position d'équilibre statique  $Y = (Y_0)$ . Pendant la vibration du système, la variation d'énergie potentielle des masses (due à la gravité) est compensée par la variation d'énergie potentielle élastique due à la déformation initiale de la poutre. On n'a donc pas à la considérer.

L'énergie cinétique totale des masses  $M_i$  situées aux points  $x_i$  de la poutre est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \sum M_i \dot{y}(x_i, t)^2 = \frac{\omega_n^2}{2} \sum M_i y(x_i, t)^2 \quad \rightarrow \quad T_{\max} = \frac{\omega_n^2}{2} \sum M_i Y(x_i)^2$$

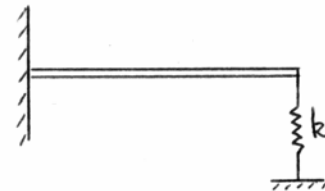
Cette énergie cinétique supplémentaire doit s'ajouter à celle de la poutre pour écrire  $T_{\max} = U_{\max}$ . La fréquence naturelle du système poutre-masses devient donc :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\sum M_i Y(x_i)^2 + \int_0^L \rho(x) Y(x)^2 dx}}$$

Remarque : Tout comme à la section 5, chacune des masses ponctuelles est traitée comme une particule. On a donc négligé ici l'énergie cinétique en rotation de ces masses ponctuelles.

### Poutre en flexion avec appui élastique (ressort)

Si la poutre est retenue en partie par un ressort  $k$  sans masse, l'énergie élastique dans le ressort viendra s'ajouter à l'énergie potentielle du système. L'énergie élastique dans le ressort situé au point  $x_o$  de la poutre est donné par :



$$U = \frac{1}{2} k y(x_o, t)^2 \quad \rightarrow \quad U_{\max} = \frac{1}{2} k Y(x_o)^2$$

On obtient ainsi une nouvelle fréquence naturelle :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k Y(x_o)^2 + \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho(x) Y(x)^2 dx}}$$

### Choix de la fonction de forme

Le succès de la méthode de Rayleigh dépend du choix de la fonction  $Y(x)$ . Plus la fonction de forme se rapproche de la déformation réelle de la poutre au mode considéré, plus la fréquence naturelle obtenue sera rapprochée de la réponse analytique. En général, la méthode de Rayleigh surestime la fréquence naturelle.

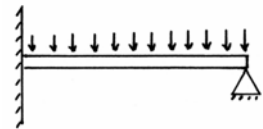
La fonction de forme doit se conformer aux conditions aux limites de la poutre (voir page 8). Il est donc tout à fait raisonnable de songer à une fonction  $Y(x) = Y_1 \sin(\pi x/L)$  dans le cas d'une poutre simplement supportée, où  $Y_1$  est une constante. Cela permet d'avoir  $Y(0) = 0$  et  $Y''(x)|_{x=0} = 0$  et de même à  $x = L$ .

Le premier mode vibratoire d'une poutre s'apparente généralement à la déformation statique de la poutre dans les mêmes conditions de chargement. Pour trouver la première fréquence naturelle de la poutre, il est acceptable de choisir comme fonction de forme la flèche donnée dans les tables de résistance des matériaux [e.g. Bazergui et al.]. Dans le cas d'une poutre simplement supportée, la flèche est donnée par  $Y(x) = Y_2 x(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ , où  $Y_2$  est une constante, ce qui permet d'avoir  $Y(x) = Y''(x) = 0$  à  $x = 0$  et à  $x = L$ .

La fonction de forme doit aussi tenir compte de tout chargement appliqué à la poutre (e.g. masse ponctuelle). Pour les cas de chargement ou de conditions aux limites non identifiés dans les tables (e.g. conditions hyperstatiques), on peut utiliser les méthodes connues en résistance des matériaux (i.e. principe de superposition, théorème de Castigliano, ...) pour déterminer la fonction appropriée.

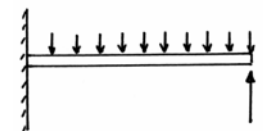
exemple :

Une poutre encastree - simplement supportee ...



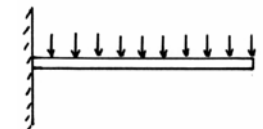
=

... devient une poutre encastree - libre si on remplace l'appui simple par une reaction verticale de la bonne grandeur.



=

La flèche de la poutre est ensuite calculée en superposant la flèche due au chargement initial ...



+

... et la flèche due à la réaction de l'appui simple.



## 7. Références

Bazergui A., Bui-Quoc T., McIntyre G., Laberge C. *Résistance des matériaux*, édition corrigée, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal

Gorman, Daniel J. *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley&Sons, 1975

Thomson, William T., Dahleh, Marie D. *Theory of Vibration with Applications*, 5e édition, Prentice-Hall, 1998